

به نام خدا

ریاضی دوازدهم

و ریاضی پایه

رشته ی

تجربی

مهندس علیرضا خوانچه زر

سرشناسه	: مهندس علیرضا خوانچه زر
عنوان و نام پدیدآور	: ریاضی دوازدهم و ریاضی پایه
مشخصات نشر	: تهران: مشاورین خبره ۱۳۹۸
مشخصات ظاهری	: ۲۴۵ ص
شابک	: ۹۷۸-۶۲۲-۹۹۵۲۱-۵-۵
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا
یادداشت	: کتابنامه: ص. ۴۵۸-۵۶۲۰
موضوع	: کمک آموزشی ریاضی دوازدهم و ریاضی پایه
موضوع	: RIYAZI 12 VA RIYAZI PAYE
موضوع	: آموزش حسابان ۲ متوسطه ۲
موضوع	: AMOZESH RIYAZI 12
رده بندی کنگره	: ۶۵۵۰۲۴/۴ ت ۲۶۶۴
رده بندی دیویی	: ۸۹۵۴/۲۵۶۲
شماره کتابشناسی ملی	: ۳۲۶۵۹۴

نام کتاب: ریاضی دوازدهم و ریاضی پایه رشته تجربی

تهیه و تنظیم: مهندس علیرضا خوانچه زر

ناشر: مشاورین خبره

چاپ: اول-۱۳۹۸

لیتوگرافی و چاپ: راه

شمارگان: ۲۰۰ نسخه

قیمت: ۸۰۰۰۰ تومان

شابک ۹۷۸-۶۲۲-۹۹۵۲۱-۵-۵

آدرس انتشارات: میدان هفت تیر - خیابان قائم مقام - نبش کوچه سام پلاک ۵۹

"همه حقوق برای مولف محفوظ است."

به نام خدا

مقدمه

دانش آموزان عزیز

کتاب پیشرو شامل درسنامه و تست های آموزشی و مفهومی است که با توجه به نیاز دانش آموزان طراحی شده است و شامل سر فصل های ریاضیات پایه و ریاضی ۳ است.

لازم به ذکر است که برخی از سوالات با پاسخ تشریحی مطرح شده است که برای سهولت شما عزیزان برای پاسخ به سوالات دیگر و رفع ابهامات خود میتوانید با مطالعه پاسخ های این سوالات سوالات دیگر را به راحتی حل کنید.

با آرزوی بهروزی و پیروزی تک تک شما عزیزان .

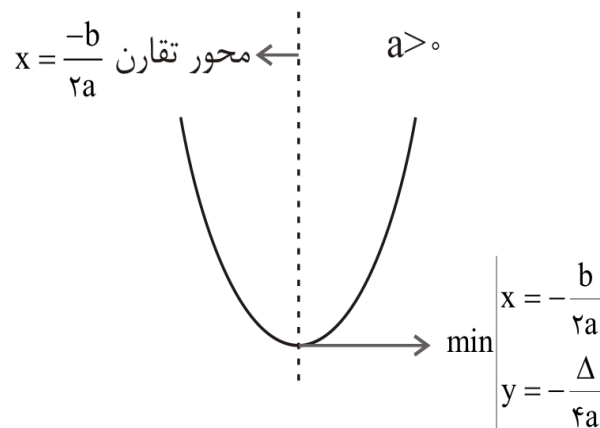
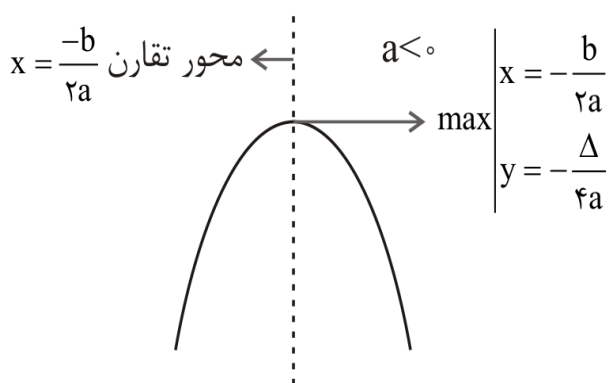
با تشکر از جناب آقای دکتر ذاکر، جناب آقای ملکی و جناب آقای بصیرت که در چاپ این کتاب ما را یاری کرده اند و از هیچ حمایتی دریغ نکرده اند.

فهرست

فصل اول - تابع و معادلات درجه ۲.....	۱
فصل دوم - مثلثات.....	۲۳
فصل سوم - حد.....	۳۹
فصل چهارم - پیوستگی.....	۸۴
فصل پنجم - مشتق.....	۹۵
فصل ششم - کاربرد مشتق.....	۱۰۹
فصل هفتم - مقاطع مخروطی.....	۱۲۴
فصل هشتم - احتمال.....	۱۴۰
فصل نهم - تصاعد.....	۱۵۱
فصل دهم - قدر مطلق.....	۱۵۸
فصل یازدهم - جزء صحیح.....	۱۷۴
فصل دوازدهم - لگاریتم.....	۲۰۶
فصل سیزدهم - آنالیز.....	۲۲۱
فصل چهاردهم - آمار.....	۲۲۳

تابع و معادله درجه ۲

فرم کلی آن به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که باید شکل و مشخصات این توابع را به صورت زیر به خاطر بسپاریم.



مثال: معادله‌ی محور تقارن تابع $y = x^2 - 6x + 1$ را بیابید.

پاسخ:

مثال: معادله‌ی محور تقارن تابع $y + x = x^2$ را بیابید.

پاسخ:

مثال: اگر خط $x = 2$ معادله محور تقارن تابع $f(x) = (1-a)x^2 - x - 3$ باشد، آن‌گاه این منحنی محور

x ها را با چه طول مثبتی قطع می‌کند؟

پاسخ:

مثال: اگر طول کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = x^2 + ax + 3$ برابر -1 باشد، مقدار a را بیابید.

پاسخ:

مثال: اگر کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = x^2 - 2x + a$ برابر 3 باشد، مقدار a را بیابید.

پاسخ:

مثال: اگر کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = x^2 + ax + 3$ برابر -1 باشد، مقدار a را بیابید.

پاسخ:

مثال: اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ بر روی محور x ها باشد، آن‌گاه مقدار k را

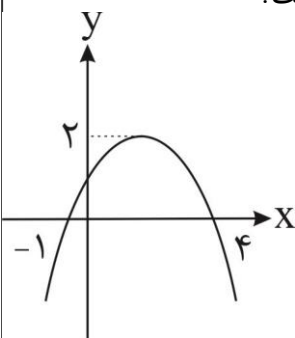
بیابید.

پاسخ:

مثال: اگر خط $y = -1$ بر سهمی $y = x^2 + ax$ مماس باشد، آن‌گاه مقدار a را بیابید.

پاسخ:

مثال: در سهمی شکل روبه رو، عرض نقطه ی تلاقی نمودار با محور عرض ها کدام است؟



۱ (۱)

۱/۵ (۲)

۳۲/۲۵ (۳)

۱۶/۲۵ (۴)

پاسخ:

.....

.....

.....

.....

مثال: اگر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور Xها را در دو نقطه ی ۱ و -۳ قطع کند و محور Yها را در نقطه ی -۱ قطع کند، آن گاه کمترین مقدار تابع کدام است؟

-۴/۳ (۴)

-۲/۳ (۳)

۴/۳ (۲)

۲/۳ (۱)

پاسخ:

.....

.....

.....

.....

حل معادلات درجه ۲:

فرم کلی این معادلات به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است که ریشه‌های معادله با توجه به علامت Δ آن‌ها به سه دسته ی کلی تقسیم می‌شوند.

در ۲ نقطه تغییر علامت می‌دهد \rightarrow در ۲ نقطه محور Xها را قطع می‌کند. \rightarrow معادله ۲ ریشه ساده دارد و $\Delta > 0$

$$\Delta > 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \quad x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

روش تجزیه

$$3) \text{ مجموع ضرایب } = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad 4) a + c = b \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-c}{a} \end{cases}$$

مثال: ریشه‌های معادلات زیر را به دست آورید.

$$(\sqrt{2}-1)x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2}+1) = 0$$

پاسخ:

$$x^2 \sin^2 x + x \tan x \cot x + \cos^2 x = 0$$

پاسخ:

مثال: اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $ax^2 + (b-a)x + (b-2a) = 0$ و x' به a و b بستگی نداشته باشد، آن‌گاه حاصل $2x' + x''$ را بیابید.

پاسخ:

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - ax - b^2 - ab = 0$ را بیابید.

پاسخ:

★ **نکته:** هرگاه در یک معادله به یک عبارت خُرکی رسیدیم، به جای آن m قرار داده و عبارت را بر حسب m ساده می‌کنیم. مقادیر m را به دست آورده و در نهایت برابر آن مقدار خُرکی قرار داده و ریشه‌های آن معادله را به دست می‌آوریم.

مثال: ریشه‌های معادلات زیر را بیابید.

$$(x^2 + x + 1)^2 - 4(x^2 + x + 1) + 3 = 0$$

پاسخ:

$$\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)^2 - 5\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) + 6 = 0$$

پاسخ:

★ **نکته:** گاهی اوقات برای ما ریشه‌های معادله اهمیت ندارد و تنها تعداد ریشه‌های معادله دارای اهمیت است. در این حالت تنها کافی است علامت Δ را به دست آوریم و با توجه به علامت Δ در مورد تعداد ریشه‌های معادله اظهار نظر کنیم.

مثال: معادله $7x^2 + 5x + 1 = 0$ چند ریشه دارد؟

پاسخ:

***تذکر:** اگر در یک معادله‌ی درجه ۲، a و c مختلف‌العلامه باشند، آن‌گاه معادله الزاماً ۲ ریشه‌ی مختلف‌العلامه دارد.

مثال: ریشه‌های معادله $k^2x^2 + (2k+1)x - k^2 - 1 = 0$ چگونه‌اند؟

پاسخ:

مثال: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور x ها را

در هر دو طرف مبدا مختصات، قطع می‌کند؟

(۲) $-2 < m < 1$

(۱) $m > 1$ یا $m < -2$

(۴) فقط $m > 1$

(۳) فقط $m < -2$

پاسخ:

$x = -\frac{b}{2a}$ ریشه مضاعف \rightarrow تغییر علامت نمی‌دهد. \rightarrow در ۱ نقطه برخورد با x ها \rightarrow معادله ۱ ریشه مضاعف دارد $\Delta = 0$ (۲)

(مماس است) (دو ریشه یکسان)

اگر معادله‌ی تلاقی دو منحنی یا یک پاره‌خط و یک منحنی دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، آن دو در نقطه تلاقی به هم مماس‌اند و یا به عبارتی اگر بخواهیم دو منحنی بر هم مماس باشند، باید معادله تلاقی دارای ریشه مضاعف باشد.

***نکته:** اگر $x = m$ ریشه‌ی مضاعف معادله باشد، فرم کلی آن به صورت $(x - m)^2 = 0$ است.

مثال: اگر $x = 3$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

پاسخ:

مثال: اگر $x = \frac{1}{p}$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $4x^2 + ax + b = 0$ باشد، مقدار $b - a$ را بیابید.

پاسخ:

مثال: ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$ را بیابید.

پاسخ:

مثال: در معادله‌ی $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ مقدار a را طوری بیابید که معادله به صورت مربع کامل باشد.

پاسخ:

۳) $\Delta < 0$

تغییر علامت نمی‌دهد \rightarrow محور x ها را قطع نمی‌کند \rightarrow معادله ریشه ندارد \rightarrow $\begin{cases} \text{همواره بالای محور } x \text{ها} \\ \text{همواره پایین محور } x \text{ها} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{همواره } + \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \\ \text{همواره } - \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \end{cases}$

مثال: حدود a را طوری بیابید که نامعادله‌ی $x^2 + ax + 1 > 0$ همواره برقرار باشد.

پاسخ:

مثال: به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x هااست؟

(۴) $-2 < a < 1$

(۳) $a > 3$

(۲) $a < -2$

(۱) $a < 1$

پاسخ:

روابط بین ریشه‌های معادلات درجه ۲

اگر X' و X'' ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، آن‌گاه باید روابط زیر در این معادلات را به خاطر بسپاریم.

۱) $X' + X'' = S = -\frac{b}{a}$

۵) $\frac{1}{X'} + \frac{1}{X''} = \frac{S}{P}$

۲) $X' \cdot X'' = P = \frac{c}{a}$

۶) $\sqrt{X'} \pm \sqrt{X''} = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}}$

۳) $X'^2 + X''^2 = S^2 - 2P$

۷) $|X' - X''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴) $X'^3 + X''^3 = S^3 - 3PS$

مثال: در معادله‌ی $X^2 - 2X - 1 = 0$ حاصل عبارت‌های خواسته شده را بنویسید.

۱) $X'^2 + X''^2 =$

پاسخ:

۲) $X'X''^3 + X'^3X'' =$

پاسخ:

$$۳) \frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2} =$$

پاسخ:

$$۴) x'^4 + x''^4 + 2x'^2 x''^2 =$$

پاسخ:

مثال: اگر $x'' > x'$ باشد، حاصل $x'^2 - x''^2$ را بیابید.

پاسخ:

مثال: در معادله $x^2 - 8x + 4 = 0$ حاصل عبارت‌های خواسته شده را بیابید.

$$۱) \sqrt{x'} + \sqrt{x''} =$$

پاسخ:

$$۲) \frac{1}{\sqrt{x'}} + \frac{1}{\sqrt{x''}} =$$

پاسخ:

$$۳) \sqrt{\frac{x'}{x''}} + \sqrt{\frac{x''}{x'}} =$$

پاسخ:

.....

.....

$$۴) x' \sqrt{x''} + \sqrt{x' x''} =$$

پاسخ:

.....

.....

مثال: در معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ حاصل $x'^4 + x''^4$ را بیابید.

پاسخ:

.....

.....

.....

☆ اتحاد مهم:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

مثال: به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ ،

برابر ۶ می‌باشد؟

$$-1, \frac{9}{5} \quad (۴)$$

$$-\frac{9}{5}, 1 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$-\frac{9}{5} \quad (۱)$$

پاسخ:

.....

.....

.....

مثال: در معادله‌ی $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$ حاصل $x''^6 + x'^6$ را بیابید.

پاسخ:

مثال: اگر در معادله‌ی $x^2 - 5x + m^3 + 5m = 0$ یکی از ریشه‌ها ۲ باشد، حاصل $x''^3 + x'^3$ را

بیابید.

پاسخ:

مثال: اگر بین ضرایب معادله درجه دوم $ax^2 + 2bx + 4c = 0$ رابطه‌ی $a + b + c = 0$ برقرار باشد، یکی از

ریشه‌های معادله‌ی کدام است؟

$$\frac{4c}{a} \quad (۴)$$

$$-\frac{4c}{a} \quad (۳)$$

$$\frac{2c}{a} \quad (۲)$$

$$-\frac{2c}{a} \quad (۱)$$

پاسخ:

مثال: اگر $k^2 + ak + b = 0$ و $k'^2 + ak' + b = 0$ باشد، $k + k'$ را بیابید.

پاسخ:

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل $(\alpha^2 + 3\alpha + 2)(\beta^2 + 3\beta - 3)$ را بیابید.

پاسخ:

مثال: اگر x', x'' ریشه‌های معادله‌ی $5x^2 + 10x - 1 = 0$ باشد، حاصل $(x'^2 + 2x')^5 + (x''^2 + 2x'')^5$ چیست؟

پاسخ:

مثال: اگر α, β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + x - 3 = 0$ باشند، حاصل $4\alpha^2 + 3\beta^2 + \alpha$ چقدر است؟

۱۰ (۴)

۲۴ (۳)

۱۸ (۲)

۲۱ (۱)

پاسخ:

مثال: اگر $\alpha, \beta, 1$ سه ریشه‌ی متمایز معادله‌ی $x^3 + ax^2 + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ:

مثال: اگر x', x'' ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل $(x' + \frac{1}{x''})^2 + (x'' + \frac{1}{x'})^2$ را

بیابید.

۷۵(۴)

۶۵(۳)

۵۵(۲)

۴۵(۱)

پاسخ:

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 + 2x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\beta^\alpha}{(\alpha+2)^5} + \frac{\alpha^\beta}{(\beta+2)^5}$ کدام است؟

صفر(۴)

۳(۳)

-۶(۲)

-۳(۱)

پاسخ:

مثال: اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 2x - 1 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل $x'^4 + 4x''^2 - 4x''$ را

بیابید.

پاسخ:

مثال: اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x - 1 = 0$ و $x'' > x'$ باشد، آن‌گاه حاصل $5x'^2 + 3x''^2$ را

بیابید.

پاسخ:

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، حاصل $[\alpha] + [\beta]$ کدام است؟

- (۱) $-1(2)$ $-2(3)$ $4(4)$ صفر

پاسخ:

مثال: در معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ ، اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، حاصل $\alpha\beta\alpha$ را بیابید.

پاسخ:

مثال: حاصل عبارت $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$ ، کدام است؟

پاسخ:

مثال: اگر حاصل عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{2}} \times (\sqrt{2+\sqrt{3}})^{\frac{4}{3}} (\sqrt{2-\sqrt{3}})^{\frac{3}{2}}$ ، به صورت $\sqrt[3]{A}$ باشد، A کدام است؟

پاسخ:

مثال: اگر $\alpha = \sqrt{3}\sqrt{2} - 4$, $\beta = \sqrt{3}\sqrt{2} + 4$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ کدام است؟

$7\sqrt{2}$ (۴)

$6\sqrt{2}$ (۳)

۸(۲)

۶(۱)

پاسخ:

★ **نکته:** اگر نتوانستیم رابطه‌ای که در مسئله داده شده است را به S و P تبدیل کنیم، خود S و P را تشکیل داده و با توجه به رابطه‌ی داده شده در مسئله پارامتر مجهول را به دست می‌آوریم.

مثال: اگر در معادله‌ی $x^2 - (2m+3)x - 27 = 0$ یکی از ریشه‌های معادله مجذور ریشه‌ی دیگر باشد، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

پاسخ:

مثال: در معادله‌ی $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیش‌تر است. m کدام است؟

۱۵(۴)

۱۴(۳)

۱۲(۲)

۱۰(۱)

پاسخ:

★ **نکته:** اگر بخواهیم که معادله‌ی درجه ۲ بنویسیم که ریشه‌های آن x' و x'' باشد، آن‌گاه خودمان با توجه به مقادیر داده شده S و P را ساخته و در رابطه زیر قرار می‌دهیم:

$$S = x' + x'' \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$P = x' \cdot x''$$

مثال: معادله‌ی درجه ۲ بنویسید که ریشه‌های آن ۲ و ۳- باشد.

پاسخ:

★ **تذکر:** اگر یکی از ریشه‌های معادله درجه ۲، $\alpha - \sqrt{\beta}$ باشد، آن‌گاه ریشه‌ی دیگر آن به صورت $\alpha + \sqrt{\beta}$ است.

مثال: معادله درجه ۲ بنویسید که یکی از ریشه‌های آن $2 - \sqrt{3}$ است.

پاسخ:

مثال: معادله‌ی درجه ۲ بنویسید که یکی از ریشه‌های آن $\sqrt{2} - 1$ است.

پاسخ:

★ **نکته:** اگر بخواهیم معادله‌ی درجه دومی بنویسیم که بین ریشه‌های آن و ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم دیگری رابطه‌ی خاصی برقرار باشد، ریشه‌های معادله‌ی جدید را y و ریشه‌های معادله قدیمی را x در نظر می‌گیریم. با

توجه به گفته‌ی مسئله رابطه‌ی بین X و Y را نوشته، X را برحسب Y به دست آورده، معادله را ساده کرده و در نهایت به جای Y ها، X قرار می‌دهیم.

مثال: معادله‌ی درجه ۲ بنویسید که هر یک از ریشه‌های آن یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

بزرگ‌تر باشد.

پاسخ:

.....

.....

.....

.....

مثال: معادله‌ی درجه ۲ بنویسید که هر یک از ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 7x + 2 = 0$

باشد.

پاسخ:

.....

.....

.....

.....

مثال: معادله‌ی درجه ۲ بنویسید که هر یک از ریشه‌های آن دو برابر معکوس ریشه‌های معادله‌ی

$$4x^2 - 7x + 3 = 0$$

باشد.

پاسخ:

.....

.....

.....

.....

مثال: معادله‌ی ای که ریشه‌های آن از ۲ برابر معکوس ریشه‌های $x^2 + 6x - 4 = 0$ یک واحد

بیشتر باشد، کدام است؟

$$(۲) \quad x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$(۱) \quad x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$(۴) \quad x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$(۳) \quad x^2 - 5x - 3 = 0$$

پاسخ:

.....

.....

.....

.....